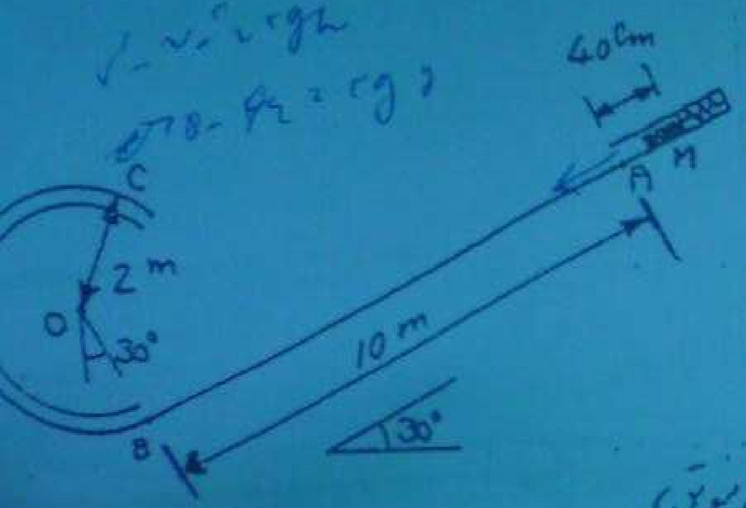
1) جسم M به جرم 10 kg در داخل شیاری مطابق شکل زیر به گونه‌ای قرار گرفته که فنر موجود در شیار را 40^{cm} از وضعیت آزاد خود فشرده نموده است ($K = 1\ ^{KN}/_{m}$). این جسم ناگهان از حالت سکون ر[...] پس از طی مسافت 10^{m} روی مسیر شیبدار AB وارد شیار دایره‌ای شکل BC می‌گردد. با استفاده از روشهای زیر محاسبه نمائید که جسم تا چه ارتفاعی در داخل شیار BC بالا خواهد رفت؟



الف - با استفاده از روابط اصلی سینماتیک ذرات و قوانین نیوتن

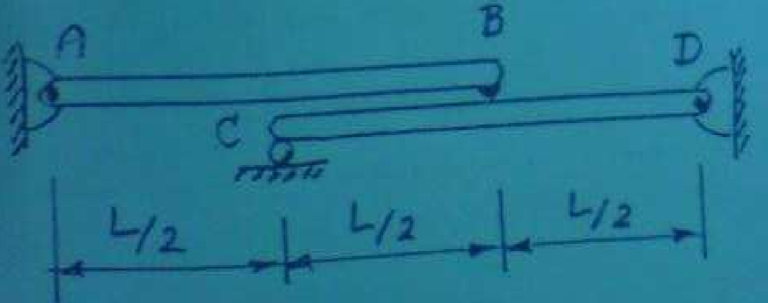
ب - با استفاده از روش کار و انرژی

توجه: سطح AB دارای اصطکاک با ضرائب $\mu_k = 0.3$ و $\mu_s = 0.4$ بوده و سایر سطوح بدون ا[...]

---

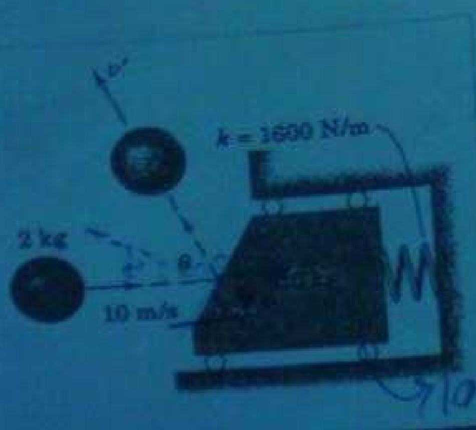
2) دو میله کاملاً یکسان AB و CD به طول L و جرم m مطابق شکل زیر در حال تعادل قرار گرفته‌اند. ناگهان تکیه‌گاه متصل به انتهای C برداشته میشود. مطلوبست تعیین عکس‌العملهای تکیه‌گاههای A و D درست پس از برداشته شدن تکیه‌گاه C.

- زائده متصل به B بدون جرم و بدون اصطکاک فرض شود.

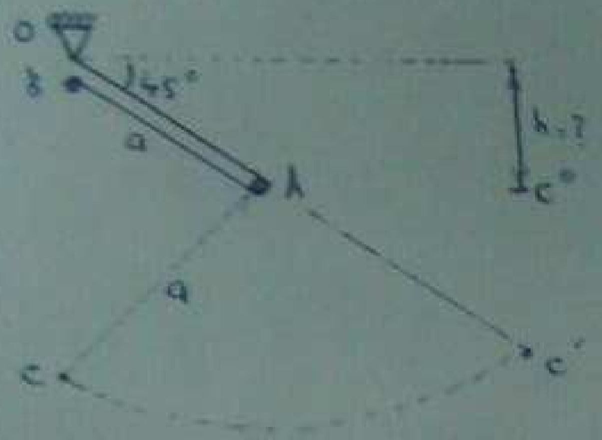


---

3) یک کره به جرم 2 kg دارای سرعت $10\ ^{m}/_{sec}$ در راستای افق با یک بلوک (ساکن) به جرم 10 kg که به یک فنر با سختی $K = 1600\ ^{N}/_{m}$ متصل است، برخورد می‌نماید. اگر ضریب استرداد برابر 0.6 باشد، سرعت v_2'، زاویه θ و جابجایی افقی (δ) بلوک را بدست آورید.

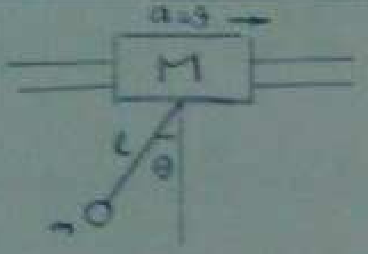


... نقطه A ... b رها می‌شود ... A ...



گلوله در چه فاصله‌ای از خط افقی می‌ایستد؟

(پایان ترم چهار 88)



۹. توپ M با شتاب ثابت a=g شروع به حرکت می‌کند. $\theta(0)=0$، $v(0)=0$

θ_{max}، کشش را در نخ به عنوان تابعی از θ $(T(\theta))$ به دست آورید.

(کتاب مریام)

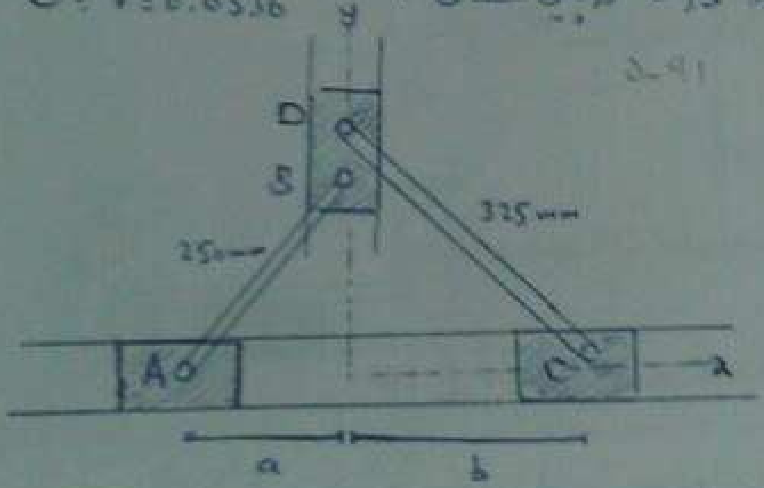
(پایان ترم اول پاییز 87)

ج: $\theta_{max}=\frac{\pi}{2}$

$T=mg(3\sin\theta+3\cos\theta-2)$

• در لحظه‌ای مطابق شکل، a=150 mm، b=125 mm، فاصله‌ی a+b بین A، C با آهنگ 0.2 m/s کاهش می‌یابد.

مطلوب است تعیین سرعت مشترک v نقاط B، D در چنین لحظه‌ای.   ج: v=0.0536



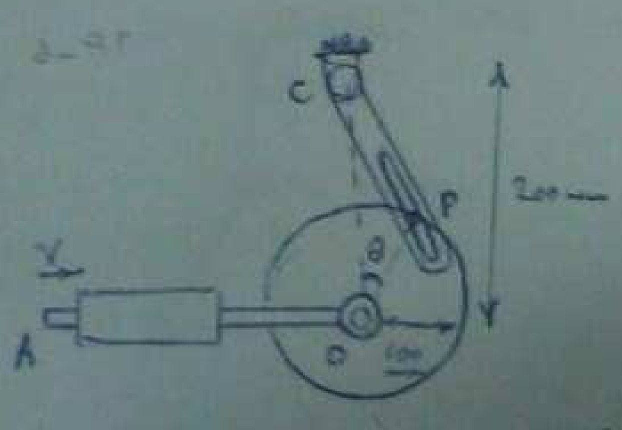
(کتاب مریام)

(پایان ترم دوم پاییز 87)

• چرخ مطابق شکل غلتش بدون لغزش انجام می‌دهد. در لحظه‌ی نشان داده شده، وقتی O مستقیماً زیر نقطه‌ی C باشد،

میله‌ی OA سرعت v=1.5 m/s به سمت راست دارد و θ=30°.

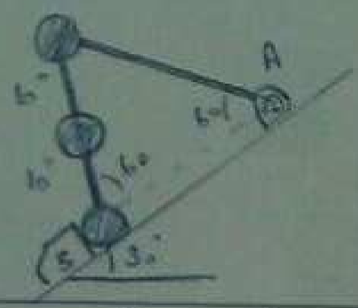
مطلوب است تعیین سرعت زاویه‌ای میله‌ی شیاردار.



ج: $\omega=18.22$ rad/s CCW

سه گوی کوچک هر یک به جرم m در صفحه‌ی عمودی به شیب °30 تکیه دارند. گوی‌ها به دو میله‌ی عمودی با جرم قابل چشم پوشی جوش داده شده‌اند. میله‌ی بالایی به جرم آن هم قابل چشم پوشی است، آزادانه به گوی بالایی در تکیه‌گاه A لولا شده است. مانع S ناگهان برداشته می‌شود. مطلوب است تعیین V، سرعت برخورد گوی بالایی به سطح شیب‌دار. اتلاف انرژی را پس از پایان حرکت محاسبه کنید.

C-100

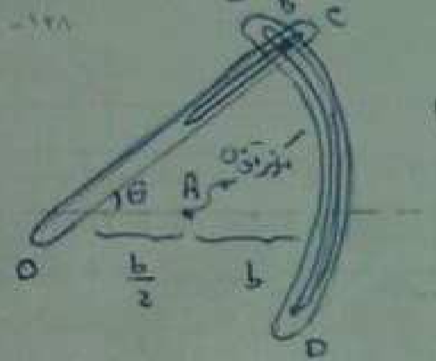


ch4 (کتاب مریام) (میان‌ترم دوم بهار 88)

---

۶. پین P به جرم m در داخل انتهای DE با شعاع b حرکت می‌کند. اگر از اصطکاک صرف‌نظر کنیم و لحظه‌ای که θ برابر °30، سرعت و شتاب زاویه‌ای به ترتیب $15\ rad/s$ و $25\ rad/s^2$ باشند. الف) مؤلفه‌های شعاعی و عرضی نیروی وارده بر پین P از B
ب) نیروی P، Q که به ترتیب بر میله‌های OC و DE اعمال می‌شود.

۱۲۸-۱۲



(کتاب هاوسنر)

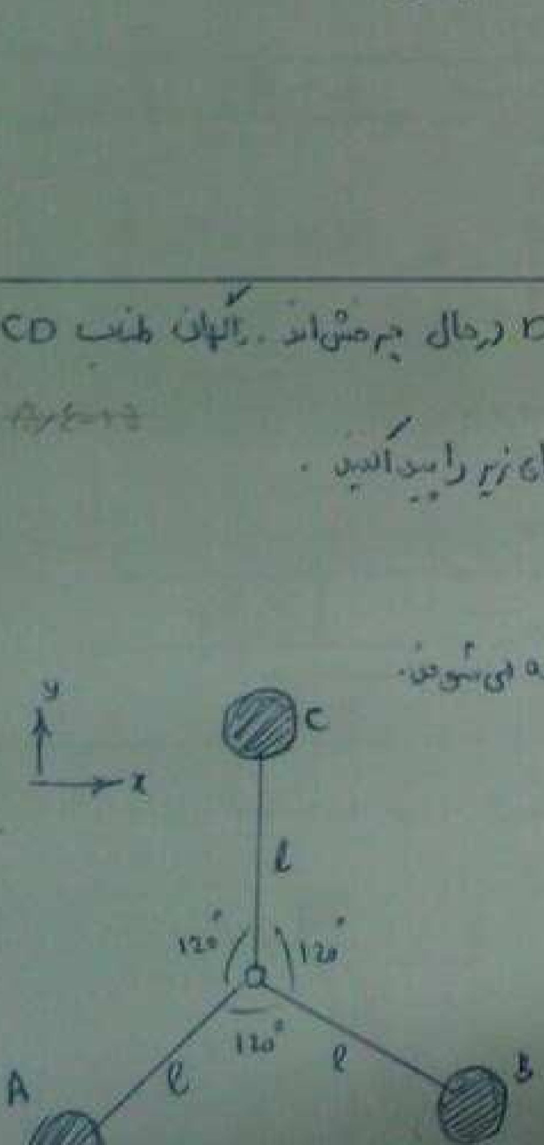
(میان‌ترم اول بهار 88)

---

۷. سه گوی کوچک A، B و C روی سطح افقی با سرعت V_0 حول نقطه‌ی D در حال چرخش‌اند. ناگهان طناب CD پاره می‌شود. پس از آن که دو طناب دیگر مجدداً کشیده شوند، پارامترهای زیر را بیابید.

الف) سرعت حلقه‌ی D ب) سرعت نسبی چرخش A و B حول D

ج) انرژی تلف شده‌ی کل سیستم وقتی طناب‌های AD و BD مجدداً کشیده می‌شوند.



ج: $\vec{V}_D = \frac{1}{2}V_0\,\hat{i}$

$V' = \frac{3}{4}V_0$

درصد انرژی اتلافی = 12.5%

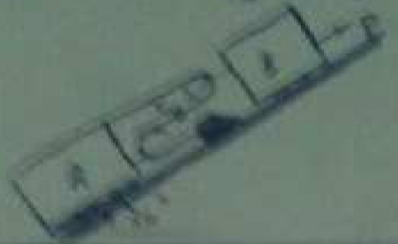
(کتاب هاوسنر)

(میان‌ترم اول بهار 88)

نمونه سوالات امتحانی دینامیک (ترم‌های گذشته) « صادق خواجه جمال »

۱. تحت اثر نیروی P، شتاب ثابت تخته‌ی B برابر 6 ft/s² به طرف بالای سطح شیب‌دار است. مطلوب است تعیین سرعت B نسبت به A، شتاب B نسبت به A و مقدار مطلق سرعت نقطه‌ی C کابل، در لحظه‌ای که سرعت B برابر 3 ft/s به طرف بالای سطح شیب‌دار است.

ج: $V_{B/A} = 1\ ft/s \quad a_{B/A} = 2\ ft/s^2 \quad V_C = 4\ ft/s$



ch2 (کتاب مریام) (میان‌ترم اول پاییز ۸۷)
(میان‌ترم اول بهار ۸۸)

---

۲. مطلوب است تعیین گستره‌ی نیروی P که به ازای آن قطعه‌ی m₁ روی قطعه‌ی m₂ نه به سمت بالا و نه به سمت پایین بلغزد. از اصطکاک مربوط به چرخ‌های قطعه‌ی m₂ صرف‌نظر کنید.

ج: 0.0577 ... $\le P \le$ 0.754 ...

ch3 (کتاب مریام) (پایان‌ترم پاییز ۸۷)

---

۳. قطعه‌ی شیب‌دار A شتاب ثابت a به سمت راست داده می‌شود. حدود θ را طوری به دست آورید که قطعه‌ی B نسبت به قطعه‌ی A بدون توجه به مقدار a لغزش نداشته باشد. ضریب اصطکاک استاتیکی بین B و A، μ_s می‌باشد.

ج: $\tan^{-1}\frac{1}{\mu_s} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

(کتاب مریام)
(میان‌ترم اول پاییز ۸۷)

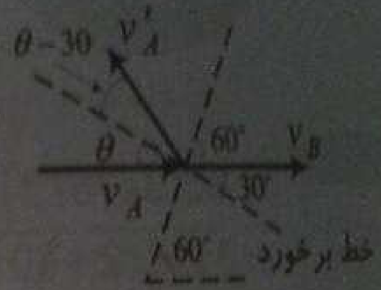
واگن کوچک به وزن 5000 lb حامل وسیله‌ی نقلیه‌ای به وزن 4000 lb است که روی سطح شیب‌دار با شیب 5° متوقف است. وسیله‌ی نقلیه از حالت سکون رها می‌شود و واگن در این حالت ساکن است. مطلوب است تعیین سرعت V واگن کوچک هنگامی که وسیله‌ی نقلیه به اندازه‌ی S = 40 ft در طول شیب پایین آمده است و درست قبل از آن که توسط ضربه‌گیر B متوقف شود. از اصطکاک صرف‌نظر کنید و وسیله‌ی نقلیه و واگن را ذره در نظر بگیرید.

ج: $V = 3.92\ ft/s$

حل:

ابتدا قانون بقای مومنتم را در جهت حرکت می‌نویسیم

$$m_A v_A = -m_A v'_A \cos\theta + m_B v_B \rightarrow 2(10) = -2v'_A \cos\theta + 10v_B \quad (1)$$



در راستای سطح شیبدار داریم

$$v_A \cos 60 = v'_A \sin(\theta - 30) \rightarrow 10\cos 60 = v'_A \sin(\theta - 30) \quad (2)$$

$$e = \frac{v'_A \cos(\theta-30) + v_B \cos 30}{v_A \sin 60} \rightarrow \frac{v'_A \cos(\theta-30) + v_B \cos 30}{10 \sin 60} = 0.6 \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \rightarrow v_B = 2.87\ m/s \ ,\ v'_A = 6.04\ m/s \ ,\ \theta = 85.9^{\circ}$$

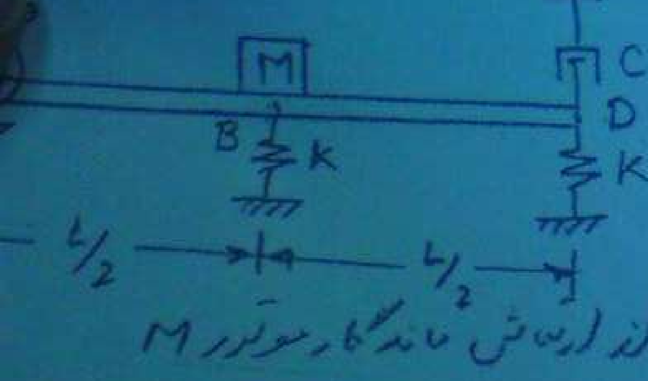
رابطه کار- انرژی: $T_1 + V_{e_1} = T_2 + V_{e_2}$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_B (v_B)^2 = \frac{1}{2}(10)(2.087)^2 = 21.778 \ ,\ T_2 = 0$$

$$V_{e_1} = 0 \ ,\ V_{e_2} = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2}(1600)\delta^2 = 800\delta^2$$

۴) با اعمال نیروی P (مطابق شکل)، مکعب m شتاب a می‌گیرد.
اگر از جرم میله های رابط چشم پوشی شود، مقدار شتاب a را بر حسب
P محاسبه نمایید ($a = f(P)$).

۵) تیر صلب AD به جرم 50 کیلوگرم و طول 4.5 متر در نقاط B و D با دو فنر
سختی $K = 1500\ N/m$ و در تکیه گاه A با یک فنر پیچشی با سختی $K_\theta = 1000\ N.m$ متصل
این تیر برای نصب موتور دوار M به جرم 200 کیلوگرم و سرعت زاویه ای rpm
که در نقطه B واقع است، طراحی شده است. ضمناً طراح برای کنترل حرکت تیر از یک میراگر
ضریب میرایی $C = 150\ N.s/m$ در نقطه
D بهره می‌گیرد. مطلوب است:



الف - معادله دینامیکی حاکم بر تیر
ب - پریود ارتعاش تیر
ج - بیشینه جابجایی دائم نقطه D ناشی از ارتعاش ماندگار موتور M

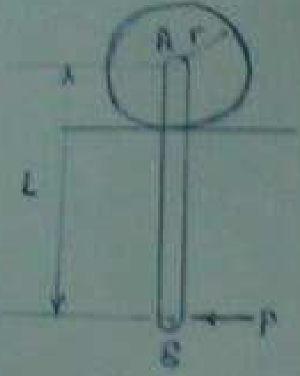
روابط (یادآوری):

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$$

$$\begin{cases} v_t = \rho\dot{\theta} \\ a_n = \rho\dot{\theta}^2 \\ a \dots \end{cases}$$

میله‌ی باریک یکنواخت AB به جرم m از دیسک یکنواختی به جرم m آویزان شده است. شتاب نقطه A و B را

بلافاصله پس از اعمال نیروی P در انتهای B بیابید.



ج: $a_A = \frac{2}{7}\frac{P}{m}$ (←)

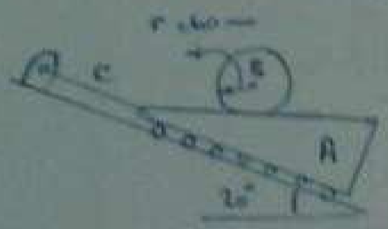
$a_B = \frac{22}{7}\frac{P}{m}$ (←)

(کتاب حامدی)

(میان‌ترم دوم پاییز ۸۷)

---

۱۳. استوانه‌ی B به جرم 3kg و گوه‌ی A به جرم 2kg توسط ریسمان C در وضعیت نشان داده شده به حالت سکون قرار دارند. طناب پاره می‌شود. با فرض عدم لغزش استوانه روی گوه و با صرف‌نظر از اصطکاک بین گوه و زمین، بلافاصله پس از پاره شدن ریسمان: الف) شتاب گوه، ب) شتاب زاویه‌ای استوانه را محاسبه کنید.



ج: $a_A = 5.13\ m/s^2$

$\alpha = 54.2\ rad/s^2$

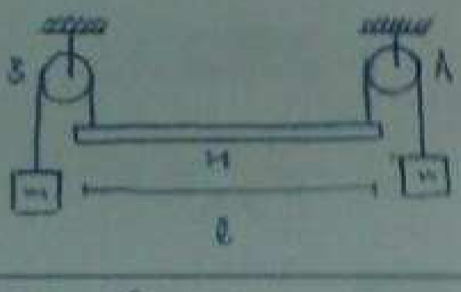
(کتاب حامدی)

(میان‌ترم دوم بهار ۸۸)

---

۱۴. اگر ناگهان نخ A را قطع کنیم، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای m را بیابید.

(پایان‌ترم بهار ۸۸)

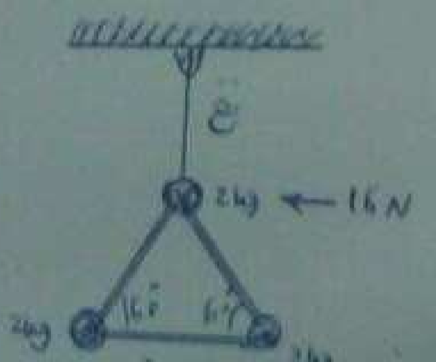


---

۱۵. سه گوی 2kg با میله‌هایی با جرم قابل چشم‌پوشی متصل شده‌اند. زمانی که از نقطه‌ی A آویزان گردیده‌اند، گروه ابتدا در حال سکون‌اند و نیروی F برابر 16N بر گوی بالایی وارد می‌شود.

۴-۱۰۲

مطلوب است محاسبه‌ی $\bar{a}$ شتاب اولیه مرکز جرم گوی‌ها، $\dot{\theta}$ آهنگ افزایش سرعت زاویه‌ای، و a شتاب اولیه‌ی گوی بالایی.



ج: $\bar{a} = 2.67\ m/s^2$

(کتاب مریام)

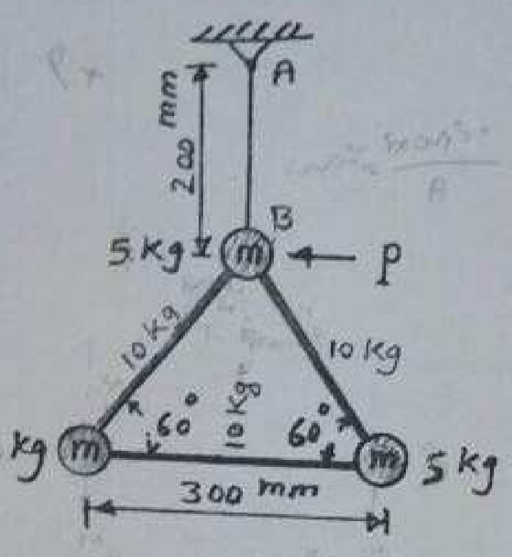
(۱) سه گوی کروی یکسان به جرم 5 kg مطابق شکل روبرو توسط سه میله صلب (به جرم 10 kg) متصل شده و توسط عضو AB از تکیه گاه مفصلی A آویزان است. اگر نیروی P=160 N به گوی فوقانی اعمال گردد، مقادیر زیر را برای دو حالت

(۱) عضو AB نخ بدون جرم و نخی
(۲) 〃 〃 میله صلب بدون جرم

محاسبه نمائید:

الف - شتاب خطی اولیه مرکز جرم سیستم ($\vec{a}$)

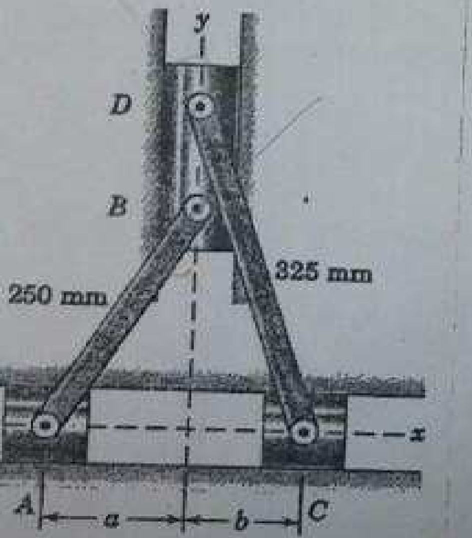
ب - نرخ تغییرات سرعت زاویه ای سیستم (α)



(۲) در شکل مقابل برای لحظه نمایش داده شده، فواصل a = 150 mm و b = 125 mm است و دو نقطه A و C با سرعت 2.5 m/sec به یکدیگر نزدیک میشوند.

الف - مقدار و جهت سرعت حلقه BD را محاسبه نمائید.

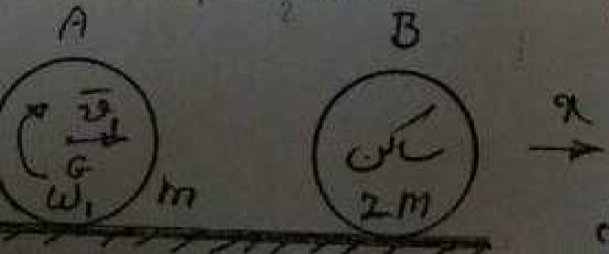
ب - اگر شتاب زاویه ای میله AB برابر α باشد، مقدار و جهت شتابهای دو انتهای میله DC را بدست آورید و آنرا تفسیر نمائید.

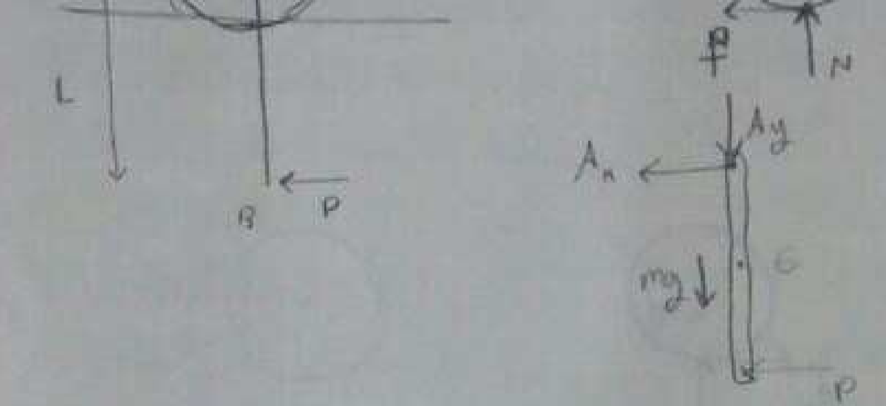


(۳) گوی کروی A به جرم m و شعاع r با حرکت غلتشی (بدون لغزش) با سرعت $\bar{v}_1$ در راستای ... با گوی کروی B به جرم 2m و شعاع r که ساکن است، برخورد می کند. اگر ضریب اصطکاک بین هر گوی با سطح افق μ_k باشد و از اصطکاک بین خود گوی ها چشم پوشی شود، با فرض برخورد غیر الاستیک ($e = 3/4$)، بدست آورید:

الف - سرعتهای خطی و زاویه ای هر گوی را بلافاصله پس از برخورد.

ب - سرعت هر گوی پس از آنکه غلتش یکنواخت داشته باشند.





برای دیسک $\Sigma M_A = \Sigma M_A \qquad f \times r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha$

$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2} m r \alpha_1} \qquad a_x = r\alpha_1$

$pL = \frac{1}{12} m L^2 \alpha + m(r\alpha_1 - \frac{L}{2}\alpha)\frac{L}{2}$

$f \times r + pL = \frac{1}{2} m r^2 \alpha_1 + m(r a_1 - \frac{L}{2}\alpha)\frac{L}{2} + \frac{1}{12} m L^2 \alpha$

برای حالت کلی

~~$\frac{1}{2} m r^2 \alpha_1 + pL =$~~

$Ax + P = m\frac{L}{2}\alpha - m a_x$

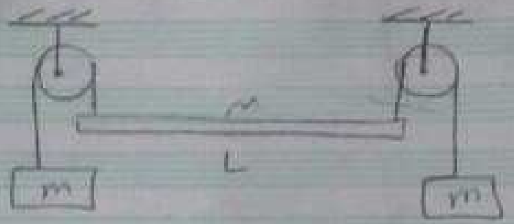
$p\cancel{L} = \frac{1}{12} m L \alpha + m(-a_x + \frac{L}{2}\alpha)\frac{1}{2}$

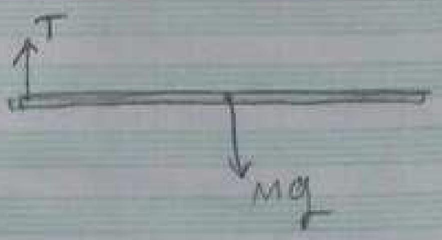
$a_x = \dfrac{(\frac{1}{12} L + \frac{L}{4})\alpha - \frac{P}{m}}{}$

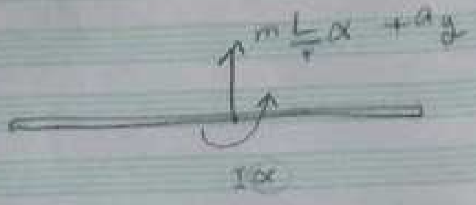
$\frac{4}{12} L \alpha$

$\boxed{a_x = \frac{1}{3} L\alpha - \frac{P}{m}} = r\alpha_1$

$\Leftarrow \boxed{\frac{1}{r} L\alpha - \frac{P}{m} = \alpha_1}$







$$mg - T = ma_y$$

$$T - Mg = m\left(\frac{L}{r}\alpha + a_y\right)$$

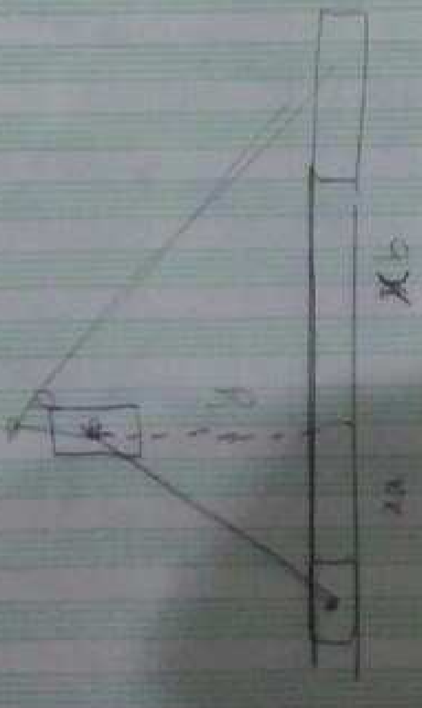
$$-T\frac{L}{2} = \frac{1}{12}ML^2\alpha$$

$$T = -\frac{1}{6}LM\alpha$$

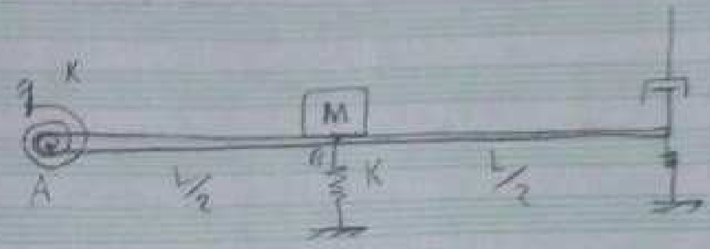
$$m(-g + a_y) = -\frac{1}{6}L\frac{M}{m}\alpha$$

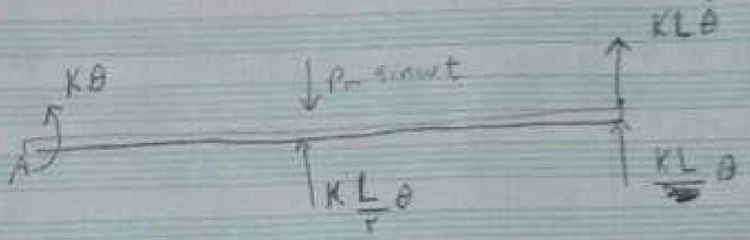
$$a_y = \frac{LM}{6m}\alpha + g$$

$$-\frac{1}{6}ML\alpha - Mg = m\frac{L}{r}\alpha + \frac{LM}{6m}\alpha + g$$



$$\frac{\quad}{\Delta m} \Rightarrow \frac{\quad}{\Delta m}$$





$$\circlearrowleft + \quad \Sigma M_A = \Sigma M_A \Rightarrow K\theta + \frac{KL^2}{4}\theta + KL^2\theta + KL^2\dot{\theta}$$

$$-\frac{L P_m}{2}\sin\omega t = -\frac{1}{12}mL^2\ddot{\theta} - m\frac{L^2}{4}\ddot{\theta}$$

$$= -\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + KL^2\dot{\theta} + \left(\frac{5}{4}KL^2 + K\right)\theta = \frac{P_m L \sin\omega t}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3K}{m}\dot{\theta} + 3\left(\frac{5K}{4m} + \frac{K}{mL^2}\right)\theta = \frac{3 P_m \sin\omega t}{2mL}$$

معادله دیفرانسیل ←

ب)

$$\omega = 120 \times 2\pi \times \frac{1}{60} = 4\pi$$

$$\frac{2\pi}{T} = \omega \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}}$$ طبق از موتور

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} =$$ با استفاده از معادله‌ی دیفرانسیل حل و کنیم و مقدار ها را بدست آوریم

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

۲ ر اد میرا

$m\ddot{x} + Kx + c\dot{x} = 0$

$\ddot{x} + \frac{K}{m}x + \frac{c}{m}\dot{x} = 0$

$2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} \qquad 2\zeta m\omega_n = c$

ω_n^2

$\zeta = 1$ بحرانی

$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$

$x = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi) \qquad \zeta < 1$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$

واداشته

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 \sin\omega t}{m}$

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{Kb \sin\omega t}{m}$

$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 \sin\omega t}{m}$

$x_p = X\sin\omega t \qquad X = \dfrac{\frac{F_0}{k}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

$M = \dfrac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

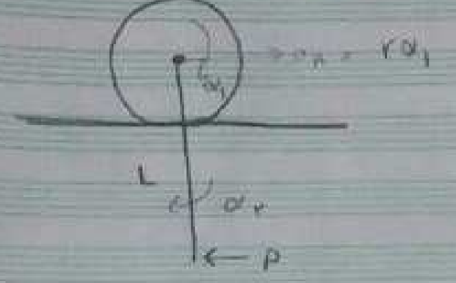
ضریب تشدید

$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$ (Kb)

$\varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$

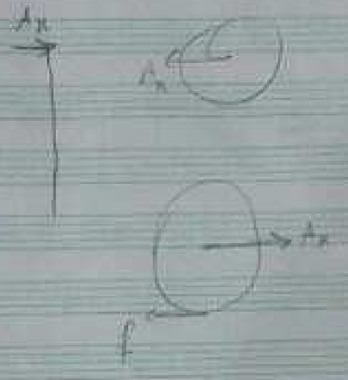
$X = \dfrac{\frac{F_0}{K}}{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$

$e^{-\zeta\omega_n t}$ [illegible] $+ X\sin(\omega t - \varphi)$



$$pL = \frac{1}{12} mL^2\alpha_2 + \left(\frac{mL^2}{2}\alpha_2 - m r\alpha_1 \frac{L}{2}\right)$$

$$P - A_x = m\left(\frac{L}{2}\alpha_2 - r\alpha_1\right)$$



$$fr = \frac{1}{2} m r^2 \alpha_1 \quad f = \frac{1}{2} m r \alpha_1$$

$$A_x - \frac{1}{2} m r\alpha_1 = m r\alpha_1$$

$$P - \frac{1}{2} m r\alpha_1 = \frac{mL}{2}\alpha_2 - m r\alpha_1 + m r\alpha_1$$

$$LP = \frac{1}{2} m r L\alpha_1 + \frac{mL^2}{2}\alpha_2 = \frac{1}{12} mL^2\alpha_2 + \frac{1}{4} mL^2\alpha_2 - m r\alpha_1\frac{L}{2}$$

$$m r L \alpha_1 = \left(\frac{1}{12} mL^2 - \frac{1}{4} mL^2\right)\alpha_2$$

$$= -\frac{1}{6} mL^2\alpha_2$$

$$r\alpha_1 = -\frac{1}{6} L\alpha_2$$

$$pL = \frac{1}{2} mL\, a_x + \frac{mL^2}{2}\left(\frac{+6\, a_x}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{2} mL\, a_x + \frac{-6}{2}\frac{mL^2}{6}\, a_x$$

$$-\frac{5}{2} mL \qquad \frac{2}{5}\frac{P}{m} = a_x$$

$$= \frac{2}{5}\frac{PL}{m}$$

$$x = \frac{\frac{3}{2}P_m\frac{\ell}{3}}{KL \left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

همه‌ی مقادیر رابطه‌ی بالا از معادلات دیفرانسیل بدست می‌آید به غیر از P_m

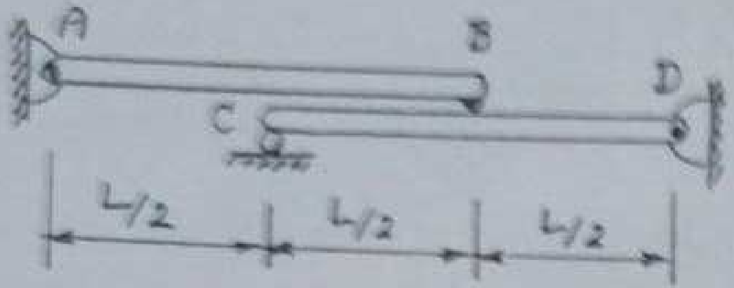
برای بدست آوردن P_m می‌دانیم که جسم معلق به موتور وصل شده و باعث نامتوازنی موتور شده و داریم:

$$P_m = m r \omega^2 =$$

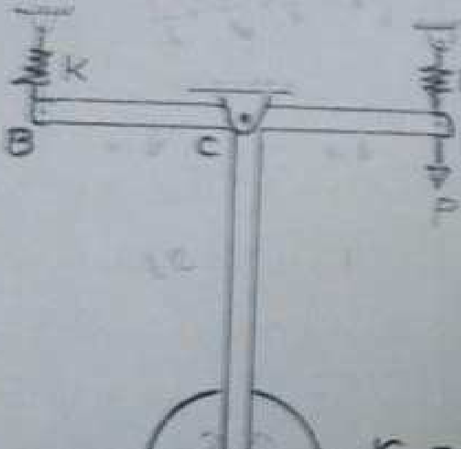
(m ← جسم معلق پایین)

۴) دو میله با طول یکسان AB و CD با طول L و جرم m مطابق شکل زیر در حال تعادل قرار گرفته‌اند. اگر ناگهان تکیه‌گاه متصل به انتهای C برداشته شود، مطلوب است تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی A و D درست پس از برداشته شدن تکیه‌گاه C.

- زائده متصل به B بدون جرم و بدون اصطکاک فرض شود.



۵) میله پاندول T شکل که از جوش شدن دو میله صلب و یکسان AC و BD ساخته شده است، توسط دو فنر هم‌سان k در دو انتهای B و D و یک تکیه‌گاه مفصلی در نقطه C مطابق شکل واقع شده است. هر یک از میله‌ها دارای طول $L = 1.2^{m}$ و جرم 10^{kg} می‌باشند. دیسک W به جرم 25^{kg} در دو حالت: الف) جوش شده و ب) مفصلی در نقطه A قرار دارد. اگر نیروی $P = 26^{N}$ را به نقطه D اعمال نماییم، این نقطه به اندازه 20^{mm} جابجا خواهد شد. در صورت برداشتن ناگهانی نیروی P، پاندول شروع به نوسان می‌کند. پریود طبیعی نوسان پاندول و حداکثر سرعت نقطه A را در دو حالت قید شده بدست آورید. (۱۲ نمره)



معادلات (یادآوری):

$= \dot{r}$ $\quad v_t = \rho\dot{\theta}$

$= r\dot{\theta}$ $\quad a_n = \rho\dot{\theta}^2$

$= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ $\quad a_t = \rho\ddot{\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}$

$= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ $\quad g = 10\ m/sec^2$

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$$

$$I_{bar} = \frac{1}{12} mL^2 \quad , \quad I_{Disk} = \frac{1}{2} mr^2$$

$$I_{sphere} = \frac{2}{5} mr^2$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}$$

$$= e^{-\xi\omega_n t}(A \sin\omega_d t + B \cos\omega_d t) + x_m \sin(\omega t - \phi)$$

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{P_0/k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \\ \tan\phi = \dfrac{2\xi\beta}{1-\beta^2} \end{cases}$$

$\beta = \omega_n$

$0 = F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = 0$

ب) $\Rightarrow \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$

$a\,ds = v\,dv$

$\int_0^{v'} v\,dv = \int_0^{0.3} r\dot{\theta}^2\,dr$

$\Rightarrow \frac{v'^2}{2} = \dot{\theta}^2\left(\frac{(0.3)^2}{2} - 0\right) \Rightarrow \boxed{v' = 0.3\,\dot{\theta} = 0.3\,\omega}$

$= 2\pi$

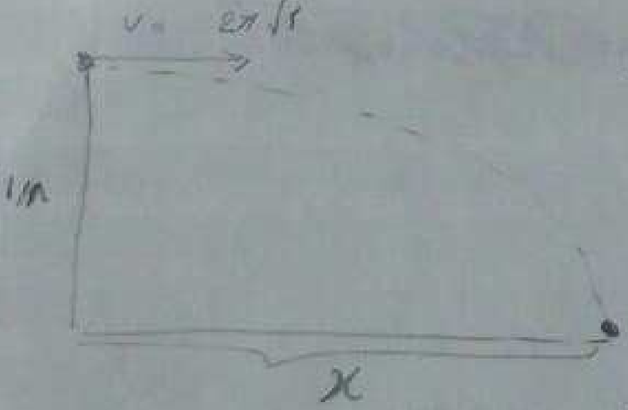
سرعت شعاعی

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}^2$

$\ddot{\theta} = 0$ چون $\dot\theta$ ثابت است

$\Rightarrow P = ma_\theta = m\left(0 + 2 \times 4\pi \times \left(\frac{0.3\pi}{3}\right)^2\right) = \boxed{\frac{1600}{9}\pi^3 m}$ نیروی جداره

ب)



$\frac{1}{2} \times g \times t^2 = 1/8$

$\Rightarrow t^2 = \frac{1/8 \times 2}{g}$

$\boxed{t = \sqrt{\frac{3/6}{g}}}$ زمان برخورد به زمین

$x = Vt + x_0 = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{7/2}{g}}}$ مسافت افقی پیموده شده

ج) برای حل این قسمت کافی است معادله‌ی مسیر حرکت را بدست [illegible] آوردیم.

v_0

$y = -\frac{1}{2}gt^2$

$x = v_0 t$

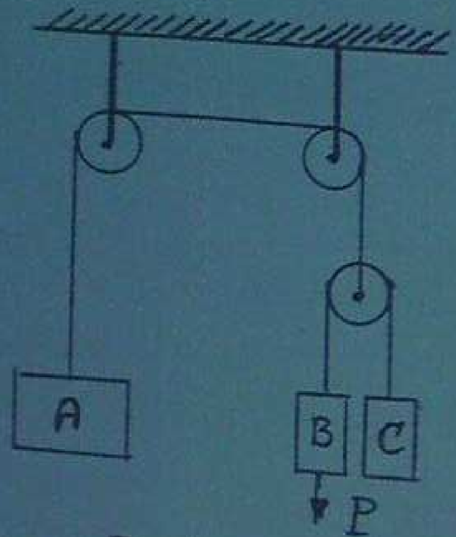
$\rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2}$

برای وقتی A

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی شریف	
امتحان پایان ترم دینامیک	مدت امتحان: $2\frac{1}{2}$ ساعت
نام و نام خانوادگی:	شماره دانشجویی

۱) سیستم مقابل متشکل از وزنه های A، B و C قبل از اعمال بار P در حال تعادل و سکون قرار داشته است. پس از اعمال بار P به وزنه B، این وزنه مسافت ۸۰ cm را در مدت زمان یک ثانیه می پیماید. اگر از اصطکاک و جرم قرقره ها چشم پوشی شود. مطلوبست: (۷ ن)



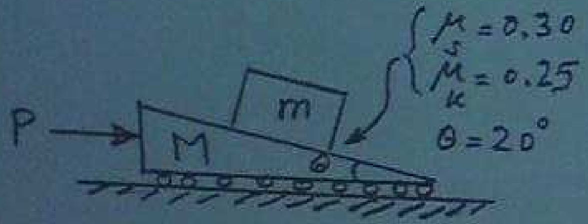
$m_A = 50\ kg$ ، $m_B = m_C = 25\ kg$

الف - کشش در کابل وزنه A

ب - سرعت حرکت وزنه A در پایان یک ثانیه

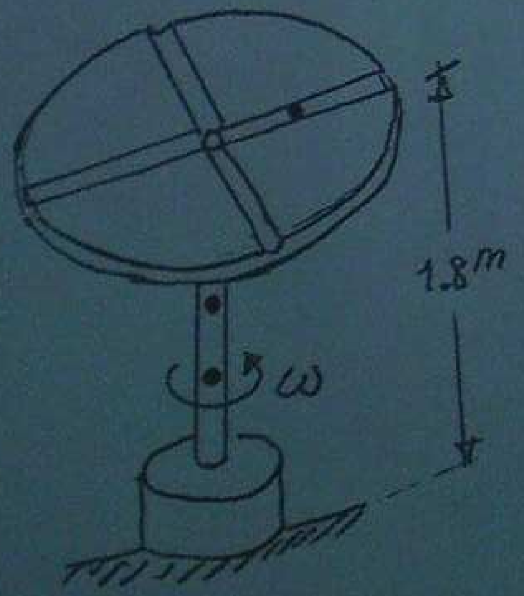
ج - شتاب نسبی B به C در پایان ثانیه اول

۲) در شکل مقابل، محدوده نیروی اعمالی P را (بگونه ای که بلوک m نسبت به گوه M نلغزد) بیابید. از اصطکاک بین گوه و زمین چشم پوشی شود. (۵ ن)



۳) در یک دستگاه مطابق شکل روبرو، گلوله هایی از طریق لوله میانی از مرکز دیسک دوار به آرامی (بدون سرعت شعاعی) وارد یکی از شیارهای سطح دیسک شده و سپس به خارج پرتاب می شود. شعاع دیسک ۳۰ cm می باشد و اصطکاک در شیارها ناچیز است. (۹ ن)

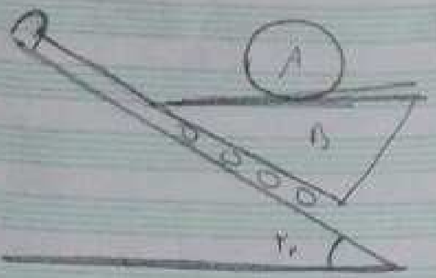
سرعت زاویه ای دیسک برابر $\omega = \frac{20\pi}{3}\ \frac{Rad}{sec}$ می باشد.

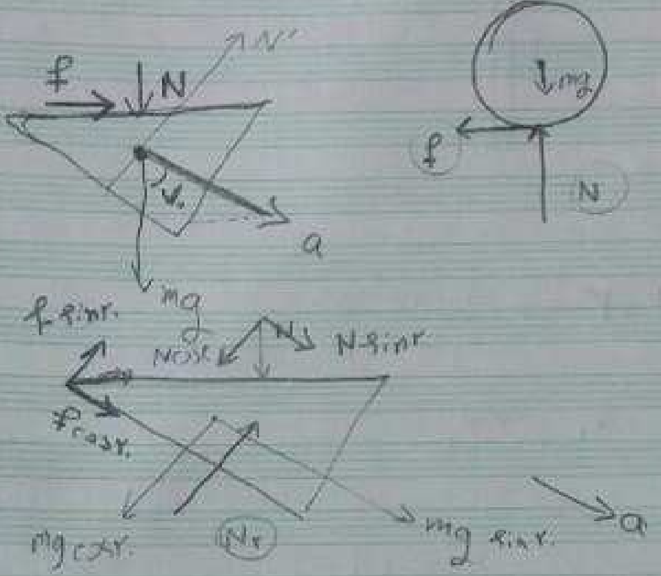


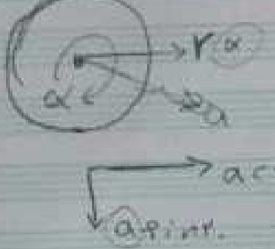
الف) نیروی N را که گلوله به جداره شیار در لحظه جدایی از دیسک وارد میکند، بیابید.

ب) مسافتی را که گلوله در راستای افقی، پس از جدایی از دیسک می پیماید، بدست آورید.

ج) مسافتی را که گلوله پس از جدایی از دیسک در فضا می پیماید، محاسبه نمایید.







$$N - mg = -ma\sin\theta \quad (1)$$

$$-f = mr\alpha + ma\cos\theta \quad (2)$$

$$f \times r = \bar{I}\alpha \quad (3)$$

$$Mg\sin\theta + N\sin\theta + f\cos\theta = Ma \quad (4)$$

$$f = \frac{\bar{I}}{r}\alpha \qquad -\frac{\bar{I}}{r}\alpha - mr\alpha = ma\cos\theta$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\bar{I}}{r} - mr\right)\alpha = m\cos\theta\, a$$

$$\Rightarrow \alpha = -\left(\frac{m\cos\theta}{\frac{\bar{I}}{r} + mr}\right) a$$

(1)(F) $N\sin\theta - mg\sin\theta = -ma\sin^2\theta$

=

$p + A_x = m\left(-a_x + \frac{L}{2}\alpha \right)$

$p + A_x = \left(-\frac{1}{2}L\alpha + \frac{p}{m} + \frac{L}{2}\alpha \right)$

$A_x = \frac{1}{4}L\alpha + \frac{p}{m} - p$

$= \frac{3}{2}m\left(\frac{1}{6}L\alpha - \frac{p}{m} \right)$

$\frac{1}{4}L\alpha + \frac{p}{m} = \frac{1}{4}mL\alpha - \frac{3}{2}p$

$\frac{p}{m} + \frac{1}{2}p = \left(\frac{1}{2}mL - \frac{1}{4}L \right)\alpha$

$\frac{\frac{p}{m} + \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}mL - \frac{1}{4}L} = \frac{p\left(\frac{4}{m} + 2 \right)}{L(2m - 1)} = \alpha$

$\frac{p\left(\frac{4}{m} + 1 \right)}{2m - 1} - \frac{p}{m}$

$= \alpha$

$$ds = \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx = \left(\sqrt{1+4Ax}\right)dx$$

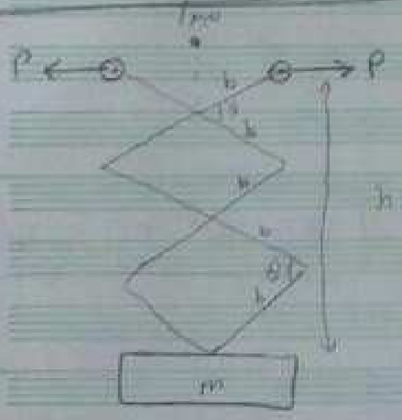
$$\Rightarrow \int_0^S ds = \int_0^{2\pi\sqrt{\frac{7h}{g}}} \sqrt{1+4Ax}\;dx = \left[\frac{1}{6A}(1+4Ax)^{\frac{3}{2}}\right]_0$$

*

$$\int \sqrt{1+4Ax}\;dx = \frac{1}{6A}(1+4Ax)^{\frac{3}{2}}$$

حالا ـ انتگرال به ـ آمده حدود را جاگذاری و مقدار A را جاگذاریم و S کل به دست

می آید



$y = h = 5b \sin\frac{\theta}{2}$ $\quad x = b\cos\frac{\theta}{2}$

داریم $\quad \Delta T + \Delta V = \Delta U$ نیروهای خارجی

$$\Rightarrow dT + dV = dU$$

$$dT = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\,dv \underset{v\,dv = a\,dy}{=} ma\,dy$$

$$= ma\left(\frac{5b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right) \quad (1)$$

$$dV = d(mgh) = mg\,dy = mg\left(\frac{5b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right) \quad (2)$$

$$dU = P\,dx = P\left(\frac{-b}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow (1) + (2) = (3)$$

$$\Rightarrow ma\left(\frac{5b}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right) + mg\left(\frac{5}{2}b\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right)$$

$$= -2P\left(\frac{-b}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\right)$$